Шпаргалка по задачам

Математическая логика и логическое программирование

4 курс, ИИТ

январь 2021 г.

Содержание

Предисловие

Привет! ☺

Данный документ содержит в себе полезную для подготовки к экзамену информацию по задачам курса МЛЛП.

Парадокс, но для того, что освоить и научиться хорошо решать задачи нужно решать как можно больше задач :) На дисках факультета есть много полезных ресурсов с задачами прошлых лет с коллоквиума и экзамена (например, concat.pdf).

Для задачи 0 советуем проверять свои решения в прологе. Например, можно использовать онлайн версию: https://swish.swi-prolog.org. Это поможет лучше понять суть логического программирования и отладить написанные функции.

Отдельно обратите внимание на теоретические задания 5 – 13. Их формулировка обычно дается в таком формате, что просто найти точный ответ в слайдах лекций не удастся. Нужно шарить в материале :c

Подробная информация по курсу есть на странице сайта маткиба.

Разбаловка:

Задание 0	6 баллов
Задание 1 – 4	по 3 балла ($\sum = 12$)
Задание 5 – 9	по 2 балла ($\sum = 10$)
Задание 10 – 13	по 3 балла ($\sum = 12$)

32 – 40	«отлично»
24 – 31	«хорошо»
16 – 23	«удовлетворительно»
< 16	«неудовлетворительно»

Задача 0

list(X) – «X является списком»
list(nil) ←
list(X.L) ← list(L)

elem(X, Y) – «X является элементом списка Y»
elem(X, X.L) ←
elem(X, Y.L) ← elem(X, L)

concat(X, Y, Z) – «Список Z – сцепление списков X и Y»
concat(nil, L, L) ←
concat(U.X, Y, U.Z) ← concat(X, Y, Z)

head(X, L) – «X является заголовком списка L»
head(X, X.Y) ←

tail(X, L) – «X является хвостом списка L»
tail(X, Y.X) ←

prefix(X, L) – «Список X является префиксом списка L»
prefix(nil, L) ←
prefix(X.Y, X.Z) ← prefix(Y, Z)

sublist(X, L) – «Список X является подсписком списка L»
sublist(nil, nil) ←
sublist(X, L) ← prefix(X, L)
sublist(X, Y.Z) ← sublist(X, Z)

subset(X, L) – «Все элементы списка X содержатся в списке L»
subset(nil, L) ←
subset(X.Y, L) ← elem(X, L), subset(Y, L)

subset(L, X) – «X – произвольное подмножества списка L»
subset(L, nil) ←
subset(L, Y.X) ← elem(Y, L), delete(L, Y, W), subset(W, X)
delete(L, Y, W) ← concat(V, Y.M, L), concat(V, M, W)

reverse(X, Y) – «Y – зеркальное отражение списка X»
reverse(nil, nil) ←
reverse(U.X, Z) ← reverse(X, Z), concat(Z, U.nil, Y)

nonelem(X, L) – «X не является элементом списка L»
nonelem(X, nill) ←
nonelem(X, Y.L) ← X ≠ Y, nonelem(X, L)

no_common(L1, L2) – «Списки L1 и L2 не имеют общих элементов»
no_common(nill, L2) $\leftarrow$
no_common(X.L1, L2) $\leftarrow$ nonelem(X, L2), no_common(L1, L2)

single(L1, L2) – «L2 содержит все элементы списка L1 без повторений»
single(nil, nill) $\leftarrow$
single(X.L1, X.L2) $\leftarrow$ nonelem(X, L1), single(L1, L2)
single(X.L1, L2) $\leftarrow$ elem(X, L1), single(L1, L2)

union(L1, L2, L3) – «множество L3 – объединение множеств L1 и L2»
union(nill, L2, L2) $\leftarrow$
union(U.L1, L2, L3) $\leftarrow$ elem(U, L2), union(L1, L2, L3)
union(U.L1, L2, U.L3) $\leftarrow$ nonelem(U, L2), union(L1, L2, L3)

intersect(L1, L2, L3) – «множество L3 – пересечение множеств L1 и L2»
intersect(nill, L2, nill) $\leftarrow$
intersect(U.L1, L2, U.L3) $\leftarrow$ elem(U, L2), intersect(L1, L2, L3)
intersect(U.L1, L2, L3) $\leftarrow$ nonelem(U, L2), intersect(L1, L2, L3)

differ(L1, L2, L3) – «множество L3 является разностью множеств L1 и L2»
differ(nill, L2, nill) $\leftarrow$
differ(U.L1, L2, L3) $\leftarrow$ elem(U, L2), differ(L1, L2, L3)
differ(U.L1, L2, U.L3) $\leftarrow$ nonelem(U, L2), differ(L1, L2, L3)

ordered(L) – «целочисленный список L упорядочен по неубыванию»
ordered(nill) $\leftarrow$
ordered(U.nill) $\leftarrow$
ordered(U.V.L) $\leftarrow$ U $\leq$ V, ordered(V.L)

max(L, X) – «X – максимальный элемент в целочисленном списке L»
max(U.nil, U) $\leftarrow$
max(U.L, U) $\leftarrow$ max(L, V), V $\leq$ U
max(U.L, V) $\leftarrow$ max(L, V), U $<$ V

max(L, X) – «X – максимальный элемент в целочисленном списке L»
max(L, X) $\leftarrow$ elem(X, L), not(exist_greater(X, L))
exist_greater(X, L) $\leftarrow$ elem(Y, L), X $<$ Y

min(L, Y) – «Y – минимальный элемент в целочисленном списке L»
min(L, Y) $\leftarrow$ elem(Y, L), not(less(L, Y));
less(L, Y) $\leftarrow$ elem(Z, L), Z $<$ Y;

len(L, X) – «X – длина списка L»
len(nill, 0) $\leftarrow$
len(U.L, X) $\leftarrow$ len(L, Y), X is Y + 1

sort(L, X) – «X – отсортированный по неубыванию список элементов L»
sort(L, X) $\leftarrow$ permutation(L, X), ordered(X)
permutation(X, X) $\leftarrow$
permutation(L, X) $\leftarrow$ transposition(L, L'), permutation(L', X)
transposition(L, L') $\leftarrow$ concat(L1, U.V.L2, L), concat(L1, V.U.L2, L')

fetch(L, K, X) – «X – K-ый элемент из списка L»
fetch(X.L, 0, X) $\leftarrow$!;
fetch(Y.L, K, X) $\leftarrow$ K $>$ 0, N is K -1, fetch(L, N, X);

sum(L, X) – «X – сумма всех элементов целочисленного списка L»
sum(Y.L, X) $\leftarrow$ sum3(L, Y, X)
sum3(nill, X, X) $\leftarrow$
sum3(U.L, Y, X) $\leftarrow$ Z is Y + U, sum3(L, Z, X)

mult(L, U, X) – «кратность вхождения X элемента U в список L»
mult(L, U, X) $\leftarrow$ mult4(L, U, 0, X)
mult4(nill, U, X, X) $\leftarrow$
mult4(U.L, U, Y, X) $\leftarrow$ Z is Y + 1, mult4(L, U, Z, X)
mult4(V.L, U, Y, X) $\leftarrow$ V $\neq$ U, mult4(L, U, Y, X)

most_freq(L, X) – «X – элемент списка L, имеющий наибольшую кратностью вхождения в список»
most_freq(X.nill, X) $\leftarrow$
most_freq(Y.L, X) $\leftarrow$ mult(Y.L, Y, N), most_freq(L, Z), mult(L, Z, M), decide(Y, N, Z, M, X)
decide(Y, N, Z, M, Z) $\leftarrow$ N $<$ M
decide(Y, N, Z, M, Y) $\leftarrow$ M $\leq$ N

common(L1, L2, X) – «X – пересечение множеств L1, L2»
common(nill, L2, nill) $\leftarrow$
common(X.L1, L2, X.L3) $\leftarrow$ elem(X, L2), !, common(L1, L2, L3)
common(X.L1, L2, L3) $\leftarrow$ common(L1, L2, L3)

Задача с экзамена 01.2021

Построить логическую программу, которая для заданного конечного множества целых чисел, представленного бесповторным списком L, и заданной пары целых чисел N_1, N_2, где $N_1 \le N_2$, могла бы вычислить список X, представляющий максимальное по числу элементов подмножество множества L, сумма двух различных чисел которого принадлежит отрезку $[N_1, N_2]$, т.е. $N_1 \le y+z \le N_2$ для любых $y, z \in X, y \neq z$. Запрос к программе должен иметь вид ? $G(L, N_1, N_2, X)$. Если множество L имеет несколько подмножеств указанного вида, то программа должна вычислять только одно из них. Если множество L не имеет подмножеств указанного вида, то вычисление запроса должно завершаться без ответа.

Решение

? G(L, N1, N2, X) ← subset(L, V), not(check(V, N1, N2)), len(V, M), not(exist_greater(L, N1, N2, M)), !, X = V.

exist_greater(L, N1, N2, M) ← subset(L, W), not(check(W, N1, N2)), len(W, K), K > M.

check(V, N1, N2) ← elem(X, V), elem(Y, V), X \= Y, not(check2(X, Y, N1, N2)).

check2(X, Y, N1, N2) ← Z is X + Y, N1 ≤ Z, Z ≤ N2.

\+ шаблоны:
subset(L, nil) ←
subset(L, Y.X) ← elem(Y, L), delete(L, Y, W), subset(W, X)
delete(L, Y, W) ← concat(V, Y.M, L), concat(V, M, W)

len(nill, 0) ←
len(U.L, X) ← len(L, Y), X is Y + 1

На прологе:

```
subset(_, []).
subset(L, [Y|X]) :- member(Y, L), delete(L, Y, W), subset(W, X).
delete(L, Y, W) :- append(V, [Y|M], L), append(V, M, W).

len([], 0).
len([_|L], X) :- len(L, Y), X is Y + 1.

check2(X, Y, N1, N2) :- Z is X + Y, N1 =< Z, Z =< N2.

check(V, N1, N2) :- member(X, V), member(Y, V), X \= Y, not(check2(X, Y, N1, N2)).

exist_greater(L, N1, N2, M) :- subset(L, W), not(check(W, N1, N2)), len(W, K), K > M.

test(L, N1, N2, X) :- subset(L, V), not(check(V, N1, N2)), len(V, M),
                      not(exist_greater(L, N1, N2, M)), !, X = V.
```

Задача 1

Приложение 1. Алфавит констант, функций и предикатов для построения формул

Константы

- **0** – число 0.

Функции

- **|x|** – 1-местная функция, вычисляющая модуль действительного числа;
- **(-x)** – 1-местная функция, изменяющая знак действительного числа;
- **x + y** – 2-местная функция, вычисляющая сумму действительных чисел;
- **x - y** – 2-местная функция, вычисляющая разность действительных чисел;
- **x × y** – 2-местная функция, вычисляющая произведение действительных чисел;
- **x / y** – 2-местная функция, вычисляющая частное действительных чисел;

Предикаты

- **N(x)** – 1-местный предикат «x – натуральное число»;
- **R(x)** – 1-местный предикат «x – действительное число»;
- **x < y, x > y** – 2-местные предикаты сравнения действительных и натуральных чисел;
- **x = y** – 2-местный предикат «x и y идентичны»;
- **S(y)** – 1-местный предикат «y – последовательность действительных чисел»;
- **E(x, n, y)** – 3-местный предикат «x – n-й элемент последовательности y»;
- **L(x, y)** – 2-местный предикат «x – предел последовательности y»;
- **A(x, y)** – 2-местный предикат «x – предельная точка последовательности y».

«y – сходящаяся последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \exists x L(x,y)$

«y – расходящаяся последовательность действительных чисел$>$
$S(y)\ \&\ \neg\exists x L(x,y)$

«y – последовательность положительных действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y)\ \&\ (x > 0))))$

«y – последовательность отрицательных действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y)\ \&\ (x < 0))))$

«y – последовательность неотрицательных действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y)\ \&\ (x > 0)\ \&\ (x = 0))))$

«y – последовательность неположительных действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y)\ \&\ (x < 0)\ \&\ (x = 0))))$

«y – сумма последовательностей v и w»
$S(y)\ \&\ S(v)\ \&\ S(w)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists z \exists u(E(z,n,v)\ \&\ E(u,n,w)\ \&\ E(z+u,n,y))$

«y – разность последовательностей v и w»
$S(y)\ \&\ S(v)\ \&\ S(w)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists z \exists u(E(z,n,v)\ \&\ E(u,n,w)\ \&\ E(z-u,n,y))$

«y – произведение последовательностей v и w»
$S(y)\ \&\ S(v)\ \&\ S(w)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists z \exists u(E(z,n,v)\ \&\ E(u,n,w)\ \&\ E(z \cdot u,n,y))$

«y – ограниченная последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \exists m(R(m)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y)\ \&\ (|x| < m))))$

«y – ограниченная сверху последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \exists m(R(m)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y)\ \&\ (x < m))))$

«y – ограниченная снизу последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \exists m(R(m)\ \&\ \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y)\ \&\ (x > m))))$

«y – монотонно возрастающая последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n \forall m(N(n)\ \&\ N(m)\ \&\ (m > n) \to \exists x \exists z(E(x,n,y)\ \&\ E(z,m,y)\ \&\ (z > x)))$

«y – монотонно убывающая последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n \forall m(N(n)\ \&\ N(m)\ \&\ (m > n) \to \exists x \exists z(E(x,n,y)\ \&\ E(z,m,y)\ \&\ (z < x)))$

«y – монотонно неубывающая последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n \forall m(N(n)\ \&\ N(m)\ \&\ (m > n) \to \exists x \exists z(E(x,n,y)\ \&\ E(z,m,y)\ \&\ ((z > x) \vee (z = x)))$

«y – монотонно невозрастающая последовательность действительных чисел»
$S(y)\ \&\ \forall n \forall m(N(n)\ \&\ N(m)\ \&\ (m > n) \to \exists x \exists z(E(x,n,y)\ \&\ E(z,m,y)\ \&\ (z < x) \vee (z = x)))$

Используйте утверждения выше, как кубики конструктора

«Не всякая предельная точка произвольной сходящейся последовательности действительных чисел является пределом этой последовательности»

$\forall y(\varphi(y) \to \neg\forall x(A(x,y) \to L(x,y)))$ или $\forall y(\varphi(y) \to \exists x(A(x,y) \mathbin{\&} \neg L(x,y)))$
где $\varphi(u) = S(u) \mathbin{\&} \exists x L(x,u)$

«Никакая монотонно убывающая последовательность действительных чисел не имеет двух различных предельных точек»

$\neg\exists y(\varphi(y) \mathbin{\&} \exists x_1 \exists x_2(A(x_1,y) \mathbin{\&} A(x_2,y) \mathbin{\&} \neg(x_1 = x_2)))$
где $\varphi(y) = S(y) \mathbin{\&} \forall n \forall m(N(n) \mathbin{\&} N(m) \mathbin{\&} (m > n) \to \exists x \exists z(E(x,n,y) \mathbin{\&} E(z,m,y) \mathbin{\&} (z < x)))$

«Всякая неограниченная сверху последовательность действительных чисел не имеет предела»

$\forall y(S(y) \mathbin{\&} \neg\psi(y) \to \neg\exists z L(z,y))$
где $\psi(y) = \exists m(R(m) \mathbin{\&} \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y) \mathbin{\&} y < m)))$

«Всякая монотонно убывающая последовательность положительных действительных чисел является сходящейся»

$\forall y(\varphi(y) \to \exists x L(x,y))$
где $\varphi(y) = S(y) \mathbin{\&} \forall n \forall m(N(n) \mathbin{\&} N(m) \mathbin{\&} (m > n) \to \exists x \exists z(E(x,n,y) \mathbin{\&} E(z,m,y) \mathbin{\&} (0 < z) \mathbin{\&} (z < x)))$

«Ни одну сходящуюся последовательность действительных чисел нельзя представить в виде суммы двух сходящихся последовательностей действительных чисел»

$\neg\exists y(\varphi(y) \mathbin{\&} \exists w \exists v(\varphi(v) \mathbin{\&} \varphi(w) \mathbin{\&} \psi(y,v,w)))$
где $\varphi(u) = S(u) \mathbin{\&} \exists x L(x,u)$,
$\psi(y,v,w) = \forall n(N(n) \to \exists x \exists z \exists u(E(z,n,v) \mathbin{\&} E(u,n,w) \mathbin{\&} E(z+u,n,y)))$

Но кубики не всегда подойдут, поэтому нужно понимать, как они составлены

«Каков бы ни был отрезок [a,b] действительных чисел, если все элементы произвольной последовательности действительных чисел лежат вне этого отрезка, то и все предельные точки этой последовательности также лежат вне этого отрезка»

$\forall a \forall b(R(a) \mathbin{\&} R(b) \mathbin{\&} ((a < b) \lor (a = b)) \to \forall y S(y) \mathbin{\&} \forall n(N(n) \to \exists x(E(x,n,y) \mathbin{\&}$
$((x < a) \lor (x > b)))) \to \forall z(A(z,y) \to ((z < a) \lor (z > b)))$

Задача 2

Закрытая таблица (аксиома): $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle, \qquad \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

ПРАВИЛА ВЫВОДА

L¬ $$\frac{\langle \neg A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A,\ \Delta \rangle}$$

R¬ $$\frac{\langle \Gamma \mid \neg A,\ \Delta \rangle}{\langle A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

L& $$\frac{\langle A\&B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A,\ B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

R& $$\frac{\langle \Gamma \mid A\&B,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A,\ \Delta \rangle;\ \langle \Gamma \mid B,\ \Delta \rangle}$$

L∨ $$\frac{\langle A \vee B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle;\ \langle\ B, \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

R∨ $$\frac{\langle \Gamma \mid A \vee B,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A,\ B,\ \Delta \rangle}$$

L→ $$\frac{\langle A \to B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle;\ \langle \Gamma \mid A,\ \Delta \rangle}$$

R→ $$\frac{\langle \Gamma \mid A \to B,\ \Delta \rangle}{\langle A,\ \Gamma \mid B,\ \Delta \rangle}$$

L∀ $$\frac{\langle \forall x\ A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A\{x/t\},\ \forall x\ A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

где переменная x свободна в формуле A для терма t

R∀ $$\frac{\langle \Gamma \mid \forall x\ A,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A\{x/c\},\ \Delta \rangle}$$

где константа c не содержится в формуле A, а также в формулах множеств Γ и Δ

L∃ $$\frac{\langle \exists x\ A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A\{x/c\},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

где константа c не содержится в формуле A, а также в формулах множеств Γ и Δ

R∃ $$\frac{\langle \Gamma \mid \exists x\ A,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A\{x/t\},\ \exists x\ A,\ \Delta \rangle}$$

где переменная x свободна в формуле A для терма t

Здесь A, B — формулы логики предикатов,
$\Gamma,\ \Delta$ — множества формул логики предикатов,
x — предметная переменная,
c — константа,
t — терм.

- все таблицы закрыты $\Rightarrow \varphi$ – общезначима;
- есть атомарные таблицы и они не закрыты, а все остальные закрыты $\Rightarrow \varphi$ – не общезначима;
- иначе нужно построить контрпример (интерпретацию), чтобы показать, что φ не общезначима.

ОЧЕНЬ ПОЛЕЗНЫЙ САЙТ: https://www.umsu.de/trees/
Позволяет проверить формулу φ на общезначимость и построить контрпример.

Задача 3

Алгоритм:

1. Исходная формула φ;
2. Отрицание φ ($\neg\varphi$);
3. ПНФ (Предваренная Нормальная Форма):
   (a) Переименование переменных;
   (b) Удаление импликаций ($\to$);
   (c) Продвижение отрицаний ($\neg$);
   (d) Вынесение кванторов ($\forall, \exists$);
   (e) Приведение к КНФ;
4. ССФ (Сколемовская Стандартная Форма):
   (a) Избавиться от кванторов существования ($\exists$)
5. Система дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_n\}$;
6. Резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\Box$ из системы S, используя правила резолюции и склейки.

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta},\ \theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$$

Правило склейки:

$$\frac{D_1 \vee L_1 \vee L_2}{(D_1 \vee D_2)\eta},\ \eta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$$